Cálculo Numérico I

Segundo examen parcial
lunes, 25 de abril de 2016
1^{o} de Mat (grupo 716); 2^{o} de D.Gr. (grupo 220)

Hay que justificar todas las respuestas

Apellidos ______________________ . ______________________ Nombre ______________________ Grupo ______

1) (**6 puntos**) Se considera la función $f(x) = 2^{x+1}$.

a) Escribir el polinomio interpolador Q de esta función con nodos en los puntos $-1, 0, 2$.

b) Dar una cota superior para el error en el intervalo $[-1, 2]$.

c) Sea $P_t(x)$ el polinomio interpolador con nodos en $-1, 0, t$, donde $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro (de forma que $P_2 = Q$). Escribir P_t para un t general.

d) Calcular el límite $\lim_{t \to +\infty} P_t(x)$ (en función de x).

Indicación: Distinguir los casos cuando $-1 < x < 0$; $x = -1$ o $x = 0$; $x \notin [-1, 0]$.

2) (**4 puntos**)

a) ¿En qué consiste la cuadratura de Gauss con un peso $\rho(x)$? Si la fórmula tiene $n+1$ nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ¿qué grado de exactitud va a tener?

b) Hallar una fórmula de cuadraturas $I(f) = pf(-a) + qf(a)$, $a \in (0, 1)$ para aproximar la integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, exacta para cualquier polinomio f de grado menor o igual que 4 que se anula en -1 y 1. Demostrar que existe una única fórmula con esta propiedad.
Indicación: ¿Cuál es el máximo común divisor de todos los polinomios, que se anulan en estos dos puntos?

c) Comprobar que la misma fórmula es exacta también para todo polinomio f de grado menor o igual que 5, con la misma condición en -1 y 1.

d) Interpretar esta fórmula en el sentido de cuadraturas de Gauss para aproximar integrales $\int_{-1}^{1} g(x)\rho(x)\, dx$ para un cierto peso ρ en el intervalo $[-1, 1]$. Hallar el nodo a de forma alternativa, utilizando polinomios ortogonales con este peso.